donc $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}(f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + f(\frac{4}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n})) = S_n$

Les inégalités (*) sont équivalentes donc $S_n - \frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) \le I(\frac{1}{n}) \le S_n$.

• On a : $S_n - \frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) \le I(\frac{1}{n}) \Rightarrow S_n \le \frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) + I(\frac{1}{n})$

d'où $I(\frac{1}{n}) \le S_n \le \frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) + I(\frac{1}{n})$.

c) • On a montré que $\lim_{\lambda \to 0^+} I(\lambda) = \frac{1}{3}$ et on a :

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0^+$ donc $\lim_{n \to +\infty} I(\frac{1}{n}) = \frac{1}{3}$.

• Calculons $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} f(\frac{1}{n})$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}(\frac{1}{4n^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{n})$$

$$= \lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{4n^3} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n}) = 0$$

on a donc pour tout $n \ge 1$, $I_n(\frac{1}{n}) \le S_n \le \frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) f(\frac{1}{n}) + I(\frac{1}{n})$

et $\lim_{n \to +\infty} I_n(\frac{1}{n}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) + I(\frac{1}{n}) = \frac{1}{3}$ donc $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

Solution 18 :

1°/a) Pour tout réel $t \ne -1$, $\sum_{k=0}^{n-2} (-t)^k$ est la somme des $(n-1)$ termes d'une suite géométrique de 1er terme 1 et de raison $-t$

donc $\sum_{k=0}^{n-2} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{n-1}}{1+t} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-2} (-t)^k + \frac{(-t)^{n-1}}{1+t} = \frac{1}{1+t}$

b) Pour tout $x \in [0,1]$, on peut intégrer entre 0 et x les deux membres de cette égalité d'où :

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{n-2} (-t)^k dt + \int_0^x \frac{(-t)^{n-1}}{1+t} dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$$